

2025 年普通高等学校招生全国统一考试(新高考 I 卷)

数学

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. $(1+5i)i$ 的虚部为 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 6

答案 $(1+5i)i = -5 + i$, 故虚部为 1. 故选择: C

2. 已知集合 $U = \{x \mid x \text{ 是小于 9 的正整数}\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, 则 $\complement_U A$ 中元素个数为 ()

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 8

答案 $\complement_U A = \{2, 4, 6, 7, 8\}$, 5 个元素. 故选择: C

3. 双曲线虚轴长是实轴长的 $\sqrt{7}$ 倍, 则离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{7}$ D. $2\sqrt{2}$

答案 $b = \sqrt{7}a \Rightarrow b^2 = 7a^2 \Rightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 8 \Rightarrow e = 2\sqrt{2}$. 故选择: D

4. 已知点 $(a, 0) (a > 0)$ 是函数 $y = 2\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 图象的一个对称中心, 则 a 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{4\pi}{3}$

答案 函数 $y = 2\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的对称中心为 $\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 因为 $a > 0$, 所以 $a_{\min} = \frac{\pi}{3}$.

故选择: C

5. 已知 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上且周期为 2 的偶函数, 当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $f(x) = 5 - 2x$, 则 $f\left(-\frac{3}{4}\right) =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

答案 $f\left(-\frac{3}{4}\right) = f\left(2 - \frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(-\frac{5}{4}\right) = f\left(4 - \frac{5}{4}\right) = f\left(\frac{11}{4}\right) = 5 - 2 \times \frac{11}{4} = -\frac{1}{2}$.

故选择: A

6. 帆船比赛中, 运动员可借助风力计测定风速的大小和方向, 测出的结果在航海学中称为视风风速, 视风风速对应的向量, 是真风风速对应的向量与船行风速对应的向量之和, 其中船行风速对应的向量与船速对应的向量大小相等, 方向相反. 图 1 给出了部分风力等级、名称与风速大小的对应关系, 已知某帆船运动员在某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图 2 (风速的大小和向量的大小相同, 单位 m/s), 则真风为 ()

等级	风速大小	名称
2	1.1 ~ 3.3	轻风
3	3.4 ~ 5.4	微风
4	5.5 ~ 7.9	和风
5	8.0 ~ 10.1	劲风

图 1

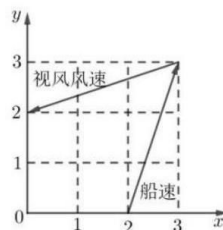


图 2

- A. 轻风 B. 微风 C. 和风 D. 劲风

答案 船风速 $(-1, -3)$, 视风速 $(-3, -1)$, 真风速 $(-2, 2)$, 所以 $V_{\text{真}} = 2\sqrt{2} < 3.3$, 为轻风.

故选择:A

7. 已知圆 $x^2 + (y+2)^2 = r^2 (r>0)$ 上到直线 $y = \sqrt{3}x + 2$ 的距离为 1 的点有且仅有 2 个, 则 r 的取值范围为 ()

A. $(0, 1)$ B. $(1, 3)$ C. $(3, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

答案 设与直线 $y = \sqrt{3}x + 2$ 距离为 1 的平行直线的方程为 $y = \sqrt{3}x + c$, 由 $\frac{|c-2|}{2} = 1$ 得 $c = 0$ 或 4 , 则 $l_1: y = \sqrt{3}x, l_2: y = \sqrt{3}x + 4$, 则圆与 l_1, l_2 共两个交点, 由于圆心 $(0, -2)$ 位于直线 l_1 下方, 故圆只能与 l_1 相交且与 l_2 不相交, 所以 $\frac{|\sqrt{3} \times 0 - (-2)|}{2} < r < \frac{|\sqrt{3} \times 0 - (-2) + 4|}{2}$, 即 $1 < r < 3$,

故选择:B

8. 已知 $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z$, 则 x, y, z 的大小关系不可能是 ()

A. $x > y > z$ B. $x > z > y$ C. $y > x > z$ D. $y > z > x$

答案 由题知 $\log_2 x - 1 = \log_3 y = \log_5 z + 2 = k$, 所以 $x = 2^{k+1}, y = 3^k, z = 5^{k-2}$,

当 $k = -1$ 时, $x = 1, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{125}$, 此时 $x > y > z$, A 可能正确;

当 $k = 2$ 时, $x = 8, y = 9, z = 1$, 此时 $y > x > z$, C 可能正确;

当 $k = 5$ 时, $x = 2^6 = 64, y = 3^5 = 243, z = 5^3 = 125$, 此时 $y > z > x$, D 可能正确.

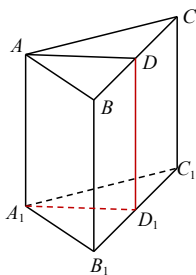
故选择:B

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, D 为 BC 中点, 则 ()

A. $AD \perp A_1C$ B. $BC \perp$ 平面 AA_1D
C. $CC_1 \parallel$ 平面 AA_1D D. $AD \parallel A_1B_1$

答案 取 B_1C_1 中点 D_1 ,



A: 若 $AD \perp A_1C$, 已知 $AD \perp AA_1$, 则 $AD \perp$ 面 ACA_1 , $\Rightarrow AD \perp AC_1$. 矛盾! A 错误; B: $AD \perp BC$. $BC \perp AA_1 \Rightarrow BC \perp$ 面 AA_1D , B 正确;

C: 若 $AD \parallel A_1B_1$, 则 $A_1B_1 \parallel A_1D_1$, 矛盾! C 错误;

D: $CC_1 \parallel AA_1, CC_1 \not\subset$ 面 $AA_1D \Rightarrow CC_1 \parallel$ 面 AA_1D , D 正确; 综上, 故选 BD.

10. 设抛物线 $C: y^2 = 6x$ 的焦点为 F , 过 F 的直线交 C 于 A, B 两点, 过 A 点作垂线交准线于 D 点, 过 F 且垂直于 AB 的直线交 $l: x = -\frac{3}{2}$ 于 E 点, 则 ()

A. $|AD| = |AF|$ B. $|AE| = |AB|$ C. $|AB| \geq 6$ D. $|AE| \cdot |BE| \geq 18$

答案 由抛物线定义可知: $|AD| = |AF|$, 故 A 正确;

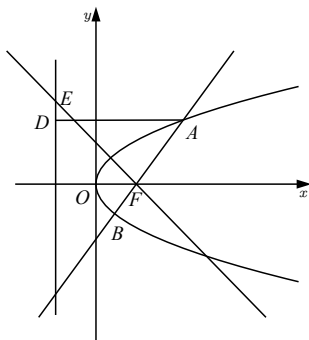
当 $AB \perp x$ 轴, 易知 $A(\frac{3}{2}, 3), B(-\frac{3}{2}, 3)$, 所以 $AB = 6$, $AE = 3\sqrt{2} \neq AB$, 故 B 错误;

当 AB 不与 x 轴垂直时, 设 $AB: y = k(x - \frac{3}{2})$, 则 $EF: y = -\frac{1}{k}(x - \frac{3}{2})$, 所以 $E(-\frac{3}{2}, \frac{3}{k})$, 联立 $\begin{cases} y = k(x - \frac{3}{2}) \\ y^2 = 6x \end{cases}$, 可得 $k^2x^2 - (3k^2 + 6)x + \frac{9}{4}k^2 = 0$, 由韦达定理得: $x_1 + x_2 = \frac{3k^2 + 6}{k^2}, x_1x_2 = \frac{9}{4}$, 所以 $|AB| = \sqrt{1+k^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = 6 + \frac{6}{k^2} \in (6, +\infty)$, 故 C 正确;

由题易知 $EF \perp AB$, 所以 $S_{\triangle AEB} = \frac{1}{2}|AE| \cdot |BE| \cdot \sin \angle AEB = \frac{1}{2}|AB| \cdot |EF| \Rightarrow |AE| \cdot |BE| = \frac{|AB| \cdot |EF|}{\sin \angle AEB} = \frac{18(1 + \frac{1}{k^2})^{\frac{3}{2}}}{\sin \angle AEB} > 18$, 若 $AB \perp x$ 轴

可取等, 故综上 D 正确.

故选择: ACD



11. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}$, 若 $\cos 2A + \cos 2B + 2\sin C = 2, \cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4}$, 则 ()

A. $\sin C = \sin^2 A + \sin^2 B$

B. $AB = \sqrt{2}$

C. $\sin A + \sin B = \frac{\sqrt{6}}{2}$

D. $AC^2 + BC^2 = 3$

答案 $\cos 2A + \cos 2B + 2\sin C = 2 \Rightarrow 2\sin C = 1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B \Rightarrow 2\sin C = 2\sin^2 A + 2\sin^2 B$, 所以 $\sin C = \sin^2 A + \sin^2 B$, 故 A 正确;

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, a^2 + b^2 = c \cdot 2R \geq c^2$, 若 $a^2 + b^2 > c^2$, 即 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 则 $A + B > \frac{\pi}{2} \Rightarrow A > \frac{\pi}{2} - B$, 则 $\sin A > \sin(\frac{\pi}{2} - B)$, 即 $\sin A > \cos B$, 代 $\lambda \sin C = \sin^2 A + \sin^2 B$, 有 $\sin C = \sin^2 A + \sin^2 B > \cos^2 B + \sin^2 B = 1$, 矛盾, 故 $a^2 + b^2 = c^2$, 即 $\cos(A+B)$

$= \cos A \cos B - \sin A \sin B = 0 \Rightarrow \cos A \cos B = \sin A \sin B = \frac{1}{4}$, 因为 $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{4} \Rightarrow ab = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{ab}{\sin A \sin B} = (2R)^2 = 2 \Rightarrow 2R =$

$\sqrt{2}, \frac{c}{\sin C} = 2R = \sqrt{2} \Rightarrow c = \sqrt{2}$, 故 B 正确;

$(\sin A + \sin B)^2 = \sin^2 A + \sin^2 B + 2\sin A \sin B = \sin C + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin A + \sin B = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 故 C 正确; $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 = c^2 = 2$, 故 D 错误.

故选择: ABC

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 若直线 $y = 2x + 5$ 是曲线 $y = e^x + x + a$ 的切线, 则 $a =$ _____.

答案 设 $f(x) = e^x + x + a, f'(x) = e^x + 1 = 2 \Rightarrow x = 0$.

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处切线为 $y = 2x + f(0) = 2x + 1 + a$

故 $1 + a = 5 \Rightarrow a = 4$

13. 若一个正项等比数列的前 4 项和为 4, 前 8 项和为 68, 则该等比数列的公比为 _____.

答案 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前四项和为 $S_4 = a_1(1 + q + q^2 + q^3) = 4$,

$S_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)q^4 = 68 \Rightarrow 4 + 4q^4 = 68 \Rightarrow q^4 = 16$, 因正项等比数列, 则 $q > 0$, 故 $q = 2$.

14. 一个箱子里有 5 个球, 分别以 1~5 标号, 若有放回取三次, 记至少取出一次的球的个数 X , 则

$E(X) =$ _____.

答案 X 的所有可能取值为 1, 2, 3,

则 $P(X=1) = C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{25}, P(X=2) = C_5^2 \cdot C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{12}{25}, P(X=3) = A_5^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{12}{25},$

所以 $E(X) = 1 \times \frac{1}{25} + 2 \times \frac{12}{25} + 3 \times \frac{12}{25} = \frac{61}{25}.$

故答案为: $\frac{61}{25}$

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

为研究某疾病与超声波检查结果的关系, 从做过的超声波检查的人群中随机调查了 1000 人, 得到如下列联表:

检查结果是否患病	正常	不正常	合计
----------	----	-----	----

患该疾病	20	180	200
未患该疾病	780	20	800
合计	800	200	1000

(1) 记超声波检查结果不正常者患病的概率为 p , 求 p 的估计值;

(2) 根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 分析样本数据中超声波检查结果与是否患该疾病有关.

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(\chi^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

解 (1) 超声波检查结果不正常者患该疾病的概率 $P = \frac{180}{200} = \frac{9}{10}$;

(2) 由题意知: $\chi^2 = \frac{1000 \times (20 \times 20 - 180 \times 780)^2}{800 \times 200 \times 800 \times 200} = 765.625 > 10.828$, 所以, 根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 超声波检查结果与患该疾病有关.

16. (本小题满分 15 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3, \frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$.

(1) 证明: 数列 $\{na_n\}$ 是等差数列;

(2) 给定正整数 m , 设函数 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$, 求 $f'(-2)$.

解 (1) 因为 $\frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$, 所以 $(n+1)a_{n+1} = na_n + 1$, 即 $(n+1)a_{n+1} - na_n = 1$,

由等差数列的定义可得数列 $\{na_n\}$ 为等差数列.

(2) 即令 $b_n = na_n$, 可得 $b_{n+1} - b_n = 1$,

即 $\{b_n\}$ 是以 $1 \cdot a_1 = 3$ 为首项, 1 为公差的等差数列, 可算得 $b_n = n + 2 = na_n$,

又因为 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_mx^m$, 所以 $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + ma_mx^{m-1}$,

即 $f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + ma_mx^{m-1}$, 即 $f'(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \cdots + b_mx^{m-1}$,

将 $x = -2$ 与 $b_n = n + 2$ 代入上式可得 $f'(-2) = 3 + 4 \cdot (-2) + 5 \cdot (-2)^2 + \cdots + (m+2) \cdot (-2)^{m-1}$,

令 $S_m = f'(-2) = 3 + 4 \cdot (-2) + 5 \cdot (-2)^2 + \cdots + (m+2) \cdot (-2)^{m-1}$,

有 $-2 \cdot S_m = 3(-2) + 4 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2)^3 + \cdots + (m+2) \cdot (-2)^m$,

所以 $3S_m = 3 + (-2) + (-2)^2 + (-2)^3 + \cdots + (-2)^{m-1} - (m+2) \cdot (-2)^m$,

$3S_m = 3 + (-2) \frac{1 - (-2)^{m-1}}{1 - (-2)} - (m+2) \cdot (-2)^m$,

所以 $f'(-2) = S_m = \frac{7}{9} - \left(\frac{3m+7}{9}\right)(-2)^m$.

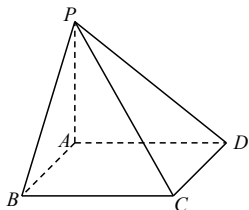
17. (本小题满分 15 分) 如图所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$.

(1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD ;

(2) 若 $PA = AB = \sqrt{2}$, $AD = \sqrt{3} + 1$, $BC = 2$, P, B, C, D 在同一个球面上, 设该球面的球心为 O .

(i) 证明: O 在平面 $ABCD$ 上;

(ii) 求直线 AC 与直线 PO 所成角的余弦值.



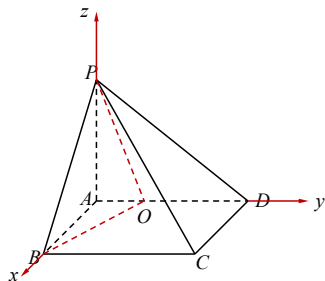
解 (1) 证明: $PA \perp$ 平面 $ABCD \Rightarrow PA \perp AB$, 又 $AB \perp AD$, 则 $AB \perp$ 面 PAD , 则平面 $PAB \perp$ 平面 PAD .

(2) 如图, 建系, 由题可知, $B(\sqrt{2}, 0, 0)$, $C(\sqrt{2}, 2, 0)$, $D(0, \sqrt{3}+1, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{2})$,

(i) 设 $\triangle BCD$ 外接圆圆心为 O_1 , 易知 BC 中垂线为 $y=1$; BD 中垂线为 $y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}x+1$, 联立解得 $O_1(0,1,0)$, 由于 $PO_1=\sqrt{3}, BO_1=\sqrt{3}$, 所以 $PO_1=BO_1$, 此时 O 与 O_1 重合, 故 O 在平面 $ABCD$ 上.

(ii) 易知 $\vec{PO}=(0,1,-\sqrt{2}), \vec{AC}=(\sqrt{2},2,0)$, 设直线 AC 与直线 PO 所成角为 θ ,

则 $\cos\theta=\frac{|\vec{PO}\cdot\vec{AC}|}{|\vec{PO}|\cdot|\vec{AC}|}=\frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$, 故直线 AC 与直线 PO 所成角余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.



18. (本小题满分 17 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 椭圆下顶点为 A , 右顶点为 B , $|AB| = \sqrt{10}$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 已知动点 P 不在 y 轴上, R 在射线 AP 上, 且满足 $|AP| \cdot |AR| = 3$.

(i) 设 $P(m, n)$, 求 R 的坐标 (用 m, n 表示);

(ii) 设 O 为坐标原点, Q 是 C 上的动点, 直线 OR 的斜率是直线 OP 的斜率的 3 倍, 求 $|PQ|$ 的最大值.

解 析 (1) 由题意 $A(0, -b), B(a, 0)$, 所以 $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}$,

因为 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以 $a^2 = b^2 + c^2$, 得 $a = 3, b = 1$, 所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

(2) (i) 由题可知直线 AP 斜率存在, 设其为 k , 则直线 AP 的方向向量为 $(1, k)$,

故可设 $\vec{AP} = \lambda_1(1, k), \vec{AR} = \lambda_2(1, k)$,

因为点 R 在射线 AP 上, 故 $\lambda_1\lambda_2 > 0$, 所以 $\vec{AP} \cdot \vec{AR} = \lambda_1\lambda_2(1+k^2) = 3, \vec{AP} = (m, n+1), \vec{AR} = (x_R, y_R)$,

$$\begin{cases} m = \lambda_1 \\ n+1 = \lambda_1 k \\ x_R = \lambda_2 \\ y_R+1 = \lambda_2 k \\ \lambda_1\lambda_2(1+k^2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = m \\ k = \frac{n+1}{m} \\ \lambda_2 = \frac{3}{\lambda_1(1+k^2)} \end{cases} = \frac{3}{m[1+(\frac{n+1}{m})^2]} = \frac{3m}{m^2+(n+1)^2} = \frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow x_R = \frac{3m}{m^2+(n+1)^2}, y_R = \frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2} - 1,$$

$$\text{所以 } R \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}, \frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2} - 1 \right).$$

$$(ii) k_{OR} = \frac{y_R}{x_R} = 3k_{OP} = \frac{3n}{m} = \frac{\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2} - 1}{\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}} = \frac{3(n+1) - [m^2+(n+1)^2]}{3m} \Rightarrow m^2+(n+4)^2 = 18,$$

即 P 在以 $G(0, -4)$ 为圆心, 半径为 $r = 3\sqrt{2}$ 的圆上运动, 所以 $|PQ| \leq |PG| + |QG| = r + |QG| = 3\sqrt{2} + |QG|$, Q 在椭圆 C 上, 故可设为

$(3\cos\theta, \sin\theta)$, $|QG|^2 = 9\cos^2\theta + (\sin\theta+4)^2 = -8\sin^2\theta + 8\sin\theta + 25 = -8(\sin\theta - \frac{1}{2})^2 + 27 \leq 27$, 当 $\sin\theta = \frac{1}{2}$, 即 Q 为 $(\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, 且 P, Q, G 三点共线且 P 在 QG 射线上时取到最大值, 此时 $|QG|_{\max} = 3\sqrt{3}$, 所以 $|PQ|_{\max} = 3(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

19. (本小题满分 17 分)

(1) 求函数 $f(x) = 5\cos x - \cos 5x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 的最大值;

(2) 给定 $\theta \in (0, \pi)$ 和 $a \in R$, 证明: 存在 $y \in [a-\theta, a+\theta]$ 使得 $\cos y \leq \cos \theta$;

(3) 设 $b \in R$, 若存在 $\varphi \in R$ 使得 $5\cos x - \cos(5x+\varphi) \leq b$ 对 $x \in R$ 恒成立, 求 b 的最小值.

解 析 **【解 析 - 1】** (1) $f'(x) = 5(\sin 5x - \sin x) = 5[\sin(3x+2x) - \sin(3x-2x)] = 10\cos 3x \cdot \sin 2x$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 递增, 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ 递

减, 所以 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}$.

(2) 若 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $(\cos y)_{\min} \leq \frac{\cos(a-\theta) + \cos(a+\theta)}{2} = \cos a \cos \theta \leq \cos \theta$; 若 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 不妨 $a \in [0, 2\pi)$, ① 若 $\pi \in (a-\theta, a+\theta)$, 则 $(\cos y)_{\min} = -1 \leq \cos \theta$; ② 若 $a+\theta \leq \pi$, 此时 $a+\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 所以 $\cos(a+\theta) < \cos \theta$, 令 $y = a+\theta$ 即可知存在 $y \in [a-\theta, a+\theta]$, 使得 $\cos y \leq \cos \theta$; ③ 若 $a-\theta \geq \pi$, 此时 $\pi < a-\theta < 2\pi-\theta < \frac{3\pi}{2}$, 所以 $\cos(a-\theta) < \cos(2\pi-\theta) = \cos \theta$, 令 $y = a-\theta$ 即可知存在 $y \in [a-\theta, a+\theta]$, 使得 $\cos y \leq \cos \theta$; 综上, 存在 $y \in [a-\theta, a+\theta]$, 使得 $\cos y \leq \cos \theta$, 证毕. (3) 不妨 $\varphi \in [0, 2\pi]$, 令 $g(x) = 5\cos x - \cos(5x+\varphi)$, $g'(x) = 5[\sin(5x+\varphi) - \sin x] = 10\cos\left(3x + \frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(2x + \frac{\varphi}{2}\right)$, 所以 $g(x)$ 的根值为 $x = -\frac{\varphi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $-\frac{\varphi}{6} + \frac{(2k+1)\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$, 记令 $g(x+\pi) = -g(x)$ 可知代入 $k = 0, 1, 2$ 即可得根值为 $\pm 4\sin\frac{\varphi}{4}$, $\pm 4\cos\frac{\varphi}{4}$, $\pm 6\sin\frac{\varphi}{6}$, $\pm 6\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{6}\right)$, $\pm 6\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{6}\right)$, 所以 $g(x)_{\max} = \max\left\{4\sin\frac{\varphi}{4}, 4\cos\frac{\varphi}{4}, 6\sin\frac{\varphi}{6}, 6\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{6}\right), 6\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{6}\right)\right\} \geq 6\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{6}\right) \geq 3\sqrt{3}$, 当 $\varphi = 0$ 取等号, 综上 $\min_{\varphi \in \mathbb{R}}(\max_{x \in \mathbb{R}} g(x)) = 3\sqrt{3}$, 所以 $b_{\min} = 3\sqrt{3}$.

【解析二】(1) $f'(x) = -5\sin x + 5\sin 5x = 5[\sin(3x+2x) - \sin(3x-2x)] = 10\cos 3x \sin 2x$,

令 $f'(x) = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减, 所以 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}$.

(2) 反证: 若 $\forall y \in [a-\theta, a+\theta]$, 有 $\cos y > \cos \theta$, 则 $y \in (-\theta + 2k\pi, \theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

不妨设 $a \in [0, 2\pi)$, 则 $a-\theta > -\pi$, $a+\theta < 3\pi$, 则 $[a-\theta, a+\theta] \subseteq (2k\pi - \theta, 2k\pi + \theta)$.

故 $a = 2k\pi$. 矛盾! 故得证!

(3) 证明: 令 $h(x) = 5\cos x - \cos(5x+\varphi)$, $h'(x) = -5\sin x + 5\sin(5x+\varphi)$,

由于 $h(x)$ 周期为 2π , 不妨设 $x \in [-\pi, \pi]$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$,

因为 $h(x)$ 连续且处处可导, 所以 $h(x)$ 最大值在根值点处取到,

令 $h'(x) = 0$, $\sin(5x+\varphi) = \sin x$, 所以 $5x+\varphi = x+2k_1\pi$ 或 $5x+\varphi = \pi-x+2k_2\pi$,

所以 $x = -\frac{\varphi}{4} + \frac{k_1\pi}{2}$ 或 $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{6} + \frac{k_2\pi}{3}$ ($k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$),

当 $x = -\frac{\varphi}{4} + \frac{k_1\pi}{2}$ 时, $h(x) = 5\cos x - \cos x = 4\cos x = 4\cos\left(-\frac{\varphi}{4} + \frac{k_1\pi}{2}\right)$,

当 $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{6} + \frac{k_2\pi}{3}$ 时, $h(x) = 5\cos x - \cos(\pi-x+2k_2\pi) = 6\cos x = 6\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{6} + \frac{k_2\pi}{3}\right)$,

所以 $h(x)_{\max} = \max\left\{4\cos\left(-\frac{\varphi}{4} + \frac{k_1\pi}{2}\right), 6\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{6} + \frac{k_2\pi}{3}\right)\right\}$,

显然 $4\cos\left(-\frac{\varphi}{4} + \frac{k_1\pi}{2}\right) \leq 4$, 记 $q(\varphi) = 6\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{6} + \frac{k_2\pi}{3}\right)$,

取值情况最多有 6 种, 相当于 $p(x) = 6\cos x$ 图象上以 $A\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{6}, p\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{6}\right)\right)$ 为起点, 横坐标以 $\frac{\pi}{3}$ 为跨度, 往后总共取 6 个点, 由 $p(x)$ 图象

可知, $\varphi = 0$ 时, $q(\varphi)$ 取最小值 $3\sqrt{3}$, $3\sqrt{3} > 4$,

所以 $b \geq 5\cos x - \cos(5x+\varphi)$, 所以 $b \geq q(\varphi)_{\min} = 3\sqrt{3}$,

此时 $h(x) \leq 3\sqrt{3}$ 恒成立, 且 $x = \pm\frac{\pi}{6}$ 时取等号, 所以 b 的最小值为 $3\sqrt{3}$.